TD Calcul algébrique

Manipulation algébriques

0YB **Exercice 1** Simplifier les expressions

1. a) $(a^{n^2})^2$ b) $(a^n)^n$ c) $\frac{a^{n^2}}{a^n}$
2. a) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, où $u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$ b) $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$ c) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

7O8 **Exercice 2** Factoriser

1. $a^3 - 8b^3$ 2. $a^n - 1$ 3. $a^{2n+1} + 1$ 4. ★ $a^4 + 4b^4$

LT4 **Exercice 3** Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que 1. $\frac{7n+2}{n+2} \in \mathbb{N}$ 2. ★ $\frac{n^3+5}{n^2+7} \in \mathbb{N}$.

Indication : *Forcer l'apparition au numérateur d'un multiple du dénominateur.*

Sommes

1RJ **Exercice 4** Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 5^k$. 2. $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ 3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{2k+1}}$ 4. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\pi^{3k-1}}$

0FQ **Exercice 5** Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+3-k}\right)$ 2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 3. $\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ 4. ★ $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

IJT **Exercice 6** Soit $n \geq 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer

1. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ 2. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^m$, en fonction de $m \in \mathbb{N}$. 3. $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

O8L **Exercice 7** Exprimer le produit suivant en termes de factorielles.

1. $\prod_{k=1}^{n} 4k^2$. 2. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$

HPT **Exercice 8** Calculer

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 2. $\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$

AS6 **Exercice 9** Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

VW6 **Exercice 10** ★ Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer la somme $\sum_{A \subset E} \operatorname{Card} A$, portant sur toutes les parties A de E.

KS7 **Exercice 11** ★ ★ [ENS 2023] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $[\![1,n]\!]$ tels que $\left| m - \sum_{i \in S} x_i \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Coefficients binomiaux et binôme de Newton

GVM **Exercice 12** Calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n}{k}$ 2. $\sum_{k=1}^{n} 2^k 5^{n-k}\binom{n}{k}$ 3. $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-2k}\binom{n}{k}$

J1V **Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. 2. En déduire que $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$. 3. ♣ Montrer que $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

639 **Exercice 14** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple d'entiers (a_n, b_n) tels que $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$.

2. Exprimer $(3-2\sqrt{2})^n$ en fonction de a_n et b_n. Montrer que $(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$ est un entier pair.
3. Montrer que $0 < 3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{4}$. En déduire que la partie entière de $x_n = (3+2\sqrt{2})^n$ est impaire. Sachant que $2^{10} > 10^3$, montrer que le développement décimal de x_{340} contient au moins 200 chiffres 9 après la virgule.

KK3 **Exercice 15** ♣ Calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ 2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ 3. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Indication : *Considérer $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$, ou appliquer la formule du capitaine.*

AE5 **Exercice 16** ★ Trinôme Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $n = a+b+c$. Dans le développement de $(x+y+z)^n$, quel est le coefficient en $x^a y^b z^c$?

SAZ **Exercice 17** ★ ★ Soit $n \geq 0$. Calculer 1. $\sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n+k}{k}$. 2. $\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k}$.

Inégalités

WBZ **Exercice 18** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{2n} k^4$. Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_1 n^5 \leq S_n \leq C_2 n^5.$$

NP6 **Exercice 19** Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. On note $m = \min_i x_i$ et $M = \max_i x_i$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq -nmM$.

Indication : *Traduire l'hypothèse $m \leq x_i \leq M$ par la positivité d'une expression quadratique, et sommer.*

Polynômes

PSL **Exercice 20** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P(x) = x^2 + ax + 1$.

1. Sans calcul lourd, montrer que si $|a| > 2$, P admet deux racines réelles λ, μ vérifiant $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$.
2. Préciser le signe de λ et μ en fonction de celui de a.

38E **Exercice 21** Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme scindé, dont on note $x_1, \ldots, x_n$ les racines. On suppose $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Montrer que les x_i sont non nulles, et exprimer $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}$ en fonction des coefficients de P.

I20 **Exercice 22** Sommes de Newton Soit $P(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. Justifier brièvement que P admet exactement trois racines réelles α, β, γ, c'est-à-dire que P s'annule trois fois.
2. Calculer le produit $\alpha\beta\gamma$, la somme $S_1 = \alpha + \beta + \gamma$, puis $S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathbb{Z}$.

Ce résultat reste valable pour tout polynôme unitaire à coefficients entiers.

2IG **Exercice 23** ★ Soient $x_1 < \ldots < x_n$ des réels.

1. Justifier brièvement que $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \geq 1\right\}$ est une réunion d'intervalles disjoints.
2. Calculer la somme de leurs longueurs.

Sommes doubles

AZW **Exercice 24** Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} i$
2. $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} ij$
3. $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$
4. $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j|$

5P9 **Exercice 25** Exprimer les produits suivants en termes de factorielles

1. $\prod\limits_{1\leq i,j\leq n} ij$
2. $\prod\limits_{1\leq i\leq j\leq n} ij$

TZC **Exercice 26** Identité de Lagrange Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels.

1. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$
2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$
3. ★ Quel est le cas d'égalité ?

MH5 **Exercice 27** ★ Somme de termes de la série harmonique On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Exprimer $\sum_{j=1}^{n} H_j$ en fonction de H_n.

Décompositions en base b

4LG **Exercice 28** ★ Développer le produit $\prod\limits_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$. Quelle est sa valeur quand $a = 2$?

VHL **Exercice 29** ★ ★ [ENS 2022] Soient $m, M, r \in \mathbb{N}$ avec $r \geq 3$, et $k_0, \ldots, k_M \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum\limits_{i=0}^{m} r^i$.

Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{M} |k_i| \geq m + 1$. **Indication** : *Procéder par récurrence, sur l'une des données.*

Autres

FR8 **Exercice 30** ♣ Formule du Crible, ou principe d'inclusion-exclusion Soit E un ensemble fini.

1. Soit $A \subset E$. Que vaut $\sum\limits_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$?
2. Soit $A, B \subset E$. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ puis $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. ★ Soit $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E.
   a) Exprimer $\mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_n}$, puis $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}$ en fonction des $\mathbb{1}_{A_i}$.
   b) Montrer que $$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$
   Cela généralise la formule $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

EF5 **Exercice 31** ★ On considère un rectangle $a \times b$ pavé par des rectangles de tailles $1 \times m$ et $n \times 1$. On pose $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\omega_m = e^{\frac{2i\pi}{m}}$. En associant à chaque case (i, j) du rectangle, le nombre $\omega_n^i \omega_m^j$, montrer que $m \mid b$ ou $n \mid a$.